

Cahier de calcul

Table des matières

La factorisation	3
Manipulation de fractions	5
Manipulation de racines carrées	7
Egalités et résolutions d'équations	9
Inégalités, résolutions d'inéquations, signes	12
Géométrie et droites	16
Courbes de fonctions	21
Trigonométrie et nombres complexes	24
Dérivation, étude de variation et primitives	26

Les règles fondamentales

Règles fondamentales du produit et du quotient

a, b, c, d désignent des nombres réels. On s'assure bien sûr que le dénominateur est non nul.

- Diviser par $a \neq 0$ ou multiplier par $\frac{1}{a}$ est la même opération.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \frac{c}{b}$
- $-(a + b + c) = -a - b - c$
- $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$
- $-(a \times b \times c) = (-a) \times b \times c = a \times (-b) \times c = a \times b \times (-c)$
- $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
- $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
- $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$
- $a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$

Règles fondamentales des puissances

n et m désignent des nombres entiers.

- Lorsque n est positif, $a^n \stackrel{\text{déf}}{=} a \times a \times a \times \dots \times a$ (n fois)
- $a^0 = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $(ab)^n = a^n b^n$

Identités remarquables

Pour tout a et b réels (ou complexes), on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Règles fondamentales des racines carrées

- pour tout a dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$
- pour tout a dans $[0; +\infty[$, $\sqrt{a^2} = a$

Pour tout a et b réels **positifs**, on a :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- **Attention!** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = a \iff (x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a})$.

La factorisation

Exercice 1. Développer

“Développer” signifie “changer un produit en une somme”.

Développer les expressions suivantes :

1. $A_1 = (3x + 4)^2 =$ _____
2. $A_2 = (2t - 3)^2 =$ _____
3. $A_3 = (5a - 2)(5a + 2) =$ _____
4. $A_4 = (-2x - 4)^2 =$ _____
5. $A_5 = 4(2t + 5) + (t - 3)(5t - 7) =$ _____
6. $A_6 = (2\alpha - 3)^2 - (4\alpha + 1)(\alpha - 3) =$ _____
7. $A_7 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)(2\alpha - 1) =$ _____

8. $A_8 = (b - a)(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) =$ _____

Exercice 2. Factorisation par un facteur apparent

L'objectif ici est de savoir factoriser et de comprendre l'utilisation de la formule : $a \times b + a \times c = a(b + c)$.
Par exemple : $(x + 1)^2 - 3x(x + 1)$ peut s'écrire $(x + 1)(x + 1) + (x + 1)(-3x)$, on reconnaît alors bien l'expression $a \times b + a \times c = a(b + c)$, d'où : $(x + 1)^2 - 3x(x + 1) = (x + 1)((x + 1) + (-3x))$.

Factoriser si possible les expressions suivantes, où a, b, x, t et u sont des nombres réels ou complexes.

1. $A_1 = 15u - 12 =$ _____
2. $A_2 = 5t - 5 =$ _____
3. $A_3 = 6x^2 + 10x =$ _____
4. $A_4 = 4t^6 - 2t^3 + 3t^2 =$ _____
5. $A_5 = (3u + 2)(4u - 1) + (3u + 2)(-6u + 8) =$ _____
6. $A_6 = (3a - 4)^2 - (2a - 5)(3a - 4) =$ _____
7. $A_7 = (2x - 3)^2 - (2x - 3) =$ _____
8. $A_8 = (x - 1)^2 + (2x + 1)(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)x(x - 1) =$ _____

Exercice 3. Factorisation avec une identité remarquable

Une bonne idée consiste à, avant d'appliquer une des formules d'identité remarquable, bien faire apparaître l'expression sous la forme souhaitée.
Par exemple pour $4x^2 - 12x + 9$, l'écrire sous la forme $(2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2$ permet de faire apparaître clairement $a^2 - 2ab + b^2$, et donc de conclure que $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Factoriser si possible les expressions suivantes, où x et t sont des nombres réels ou complexes.

1. $A_1 = 9x^2 + 42x + 49 =$ _____

2. $A_2 = 25t^2 - 60t + 36 =$ _____

3. $A_3 = 9x^2 - 64 =$ _____

Exercice 4. ★ Factorisation par un facteur commun caché

Dans cet exercice, le facteur par lequel on doit factoriser est caché, et doit être obtenu en effectuant un petit calcul, comme remplacer $(1 - t)$ par $-(t - 1)$, ou encore $(10x - 5)$ par $5(2x - 1)$...

Factoriser si possible les expressions suivantes, où x et t sont des nombres réels ou complexes.

1. $A_1 = \sqrt{3}(2 + t)(t - 1) - (1 - t)3t + t - 1 =$ _____

2. $A_2 = 3x(10x - 5) + 5x^2(2x - 1) =$ _____

3. $A_3 = -2(x^2 - 1) - 5(4x + 3)(2x + 2) =$ _____

4. $A_4 = (t^2 + t - 4)^2 - 9(t^2 - 3t + 6)^2 =$ _____

5. $A_5 = a^2 - a - b^2 - b =$ _____

6. $A_6 = (2x - 5)(7 + 3x) - (4x^2 - 20x + 25) =$ _____

7. $A_7 = (t - 3)(3t + 5) + (9t^2 + 30t + 25) =$ _____

8. $A_8 = 3(t + 3)(2t + 3) - (4t^2 - 9) =$ _____

Exercice 5. Factorisation “forcée”

Les exercices précédents permettent de factoriser “naturellement” une expression. Il arrive que l’on ait besoin de factoriser une expression de façon pas naturelle, comme par exemple : $x^3 - 2x^2 + 3 = x \left(x^2 - 2x + \frac{3}{x} \right)$. Ci-dessus, on a factorisé par x , et pourtant x n’était pas un facteur commun dans l’expression de départ. C’est ce que l’on appelle une factorisation “forcée”.

Faire une factorisation forcée des expressions suivantes :

1. $\frac{1}{3}x^5 + x^3 + 1$ par x^3 : _____

2. $\cos(6x) - \sin(3x)$ par 3 : _____

3. $e^2x - 3x^3 - 1$ par x^2 : _____

Manipulation de fractions

Exercice 6. Calculs élémentaires

Il est important, lorsqu'on fait des calculs sur les fractions, de bien chercher à **simplifier avant de calculer**. Par exemple, écrire $7 \times \frac{3+8}{14} = \frac{77}{14}$, bien que mathématiquement correct, est une très mauvaise idée : il faut remarquer que le 7 et le 14 se simplifient : $7 \times \frac{3+8}{14} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$.

Calculer les expressions suivantes :

1. $\frac{6(3+12)}{18} =$ _____
2. $5\frac{8+6}{x^2-3x} =$ _____
3. $(x+1)\frac{2x+3}{x(x+1)} =$ _____
4. $x\frac{x^2-3x}{x^3} =$ _____

Exercice 7. Calculs élémentaires

L'objectif est de savoir mettre des fractions au même dénominateur, mais en choisissant le **plus petit dénominateur possible**. Par exemple, écrire $\frac{3}{2 \times 5} + \frac{7}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 5 + 7 \times 2 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5}$, bien que mathématiquement juste, sera compté comme **faux** car ce n'est pas le plus petit dénominateur. La bonne réponse est : $\frac{3}{2 \times 5} + \frac{7}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 2 + 7}{2 \times 2 \times 5}$.

Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1. $A_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$ _____
2. $A_2 = 2 - \frac{13}{8} + \left(1 + \frac{5}{6}\right) =$ _____
3. $A_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) =$ _____
4. $A_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) =$ _____

Exercice 8. Mise au même dénominateur avec des variables

La consigne de l'exercice précédent est encore plus importante ici : écrire $\frac{2x+1}{x(x+1)} - \frac{1-x}{(x+1)(x+2)} = \frac{(2x+1)(x+1)(x+2) - (1-x)x(x+1)}{x(x+1)^2(x+2)}$ au lieu de $\frac{(2x+1)(x+2) - (1-x)x}{x(x+1)(x+2)}$ sera compté faux, car en exercice cela peut rendre la question à faire presque impossible !

Mettre les fractions suivantes au même dénominateur, en choisissant toujours le dénominateur le plus simple.

1. $A_1 = \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x}{x-2} =$ _____
2. $A_2 = \frac{3x^2}{x^3+1} - 5 =$ _____
3. $A_3 = \frac{2a-b}{a+b} - \frac{a+2b}{a+b} =$ _____
4. $A_4 = \frac{u-1}{u+1} - \frac{u+1}{u-1} =$ _____
5. $A_5 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{\alpha+1} =$ _____
6. $A_6 = \frac{\theta-2\alpha}{\alpha^2+1} - \theta =$ _____
7. $A_7 = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{t^2} =$ _____

8. $A_8 = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2} =$ _____

Exercice 9. Scinder une fraction

Il est parfois nécessaire dans certains exercices de faire le contraire d'une mise au même dénominateur, on utilise alors la formule $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Scinder les fractions suivantes comme sommes de deux fractions, et simplifier si possible les expressions obtenues.

1. $A_1 = \frac{1+2x}{x+1} =$ _____ 2. $A_2 = \frac{1-n}{n} =$ _____
 3. $A_3 = \frac{1+n}{n} =$ _____ 4. $A_4 = \frac{3x^3+2x+1}{x^2} =$ _____

Exercice 10. Simplifier une fraction

Pour simplifier une fraction, on utilise la formule $\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$, la règle est donc d'avoir **un produit au numérateur et au dénominateur**. Cela nécessite parfois de factoriser, éventuellement de tête, le numérateur et/ou le dénominateur. Par exemple pour $\frac{3x^2+6x}{12x^2}$, on peut remarquer que $3x^2+6x = 3x \times (x+2)$ et que $12x^2 = 3x \times 4x$, ainsi la fraction devient $\frac{3x \times (x+2)}{3x \times 4x} = \frac{x+2}{4x}$.
 Parfois, le produit est obtenu en remarquant que $a = a \times 1$, comme par exemple pour $\frac{x+3}{x^2+6x+9}$: le dénominateur se factorise en $(x+3)^2$ et on a alors $\frac{x+3}{(x+3)^2}$, le produit au numérateur est alors $(x+3) \times 1$, ce qui donne $\frac{(x+3) \times 1}{(x+3) \times (x+3)} = \frac{1}{x+3}$.

Simplifier si possible les expressions suivantes.

1. $A_1 = \frac{(x+1)^2 - (x+1)(5-x) + 2x(x+1) + x+1}{x+1} =$ _____
 2. $A_2 = \frac{\sin(3t)}{6t} =$ _____
 3. $A_3 = \frac{2+4x^2}{1-4x^2} =$ _____
 4. $A_4 = (\sqrt{3}u-1) \frac{1+3u}{(1-\sqrt{3}u)u+1} =$ _____

Exercice 11. Gérer les doubles fractions

Il y a deux méthodes pour éliminer des doubles fractions. La plus connue est d'utiliser $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$, l'autre est de multiplier numérateur et dénominateur par la même quantité. Par exemple pour $\frac{1 + \frac{x+1}{x}}{2 - \frac{3}{x}}$, en multipliant numérateur et dénominateur par x , on obtient : $\frac{x+x+1}{2x-3}$.

Écrire les doubles fractions suivantes, si possible, comme étant une seule fraction.

1. $A_1 = \frac{1 - \frac{u}{1+u}}{\frac{u+1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}} =$ _____
 2. $A_2 = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} =$ _____

$$3. A_3 = \frac{\tan x - \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}}{\frac{\cos x}{1 - 2 \cos x} \frac{1}{1 + \cos^2 x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. A_4 = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5. A_5 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \times \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Manipulation de racines carrées

 Bien relire les règles sur les puissances en première page!

Exercice 12. Manipulation de puissances

Simplifier les nombres suivants.

$$1. A_1 = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 2. A_2 = \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. A_3 = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 4. A_4 = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5. A_5 = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 6. A_6 = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7. A_7 = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 8. A_8 = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9. A_9 = (a^3)^2 \times a^{-4} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 10. A_{10} = a^2 b^{-3} (ab)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Exercice 13. Simplifier une racine carrée

Pour réduire une racine carrée, on exploite le fait que, si a est positif, $\sqrt{a^2} = a$, et les formules $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, valables pour a et b positifs.

L'objectif est alors de faire apparaître un terme au carré et de le sortir de la racine, comme par exemple pour $\sqrt{12x^3}$, avec x positif : on pense très fort que $12x^3$ peut être mis sous la forme $2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x$, et on en déduit qu'il est égal à $2^2 \times 3 \times x^2 \times x$, d'où $\sqrt{12x^3} = \sqrt{2^2 \times 3 \times x^2 \times x} = \sqrt{2^2} \sqrt{3} \sqrt{x^2} \sqrt{x}$, et on obtient donc $2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$ que l'on peut réécrire sous la forme $2x\sqrt{3x}$.

Réduire si possible les racines carrées suivantes, où $a \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$.

$$1. \sqrt{18} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 2. \sqrt{28} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. \sqrt{24} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 4. \sqrt{81} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5. \sqrt{54} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 6. \sqrt{\frac{1}{9}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7. \sqrt{\frac{1}{24}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 8. \sqrt{\frac{3a^2}{32}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9. \sqrt{a^7} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 10. \sqrt{a^{13}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11. \sqrt{2a+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12. \sqrt{a^2+2a+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

13. $\sqrt{u^2 + 2u - 1} =$ _____

Exercice 14. Manipuler des fractions avec des racines carrées

L'objectif est de réécrire des fractions sous d'autres formes comme dans les exemples suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

En s'appuyant sur les exemples ci-dessus, transformer/simplifier.

1. $A_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}} =$ _____
2. $A_2 = 7\frac{6}{\sqrt{7}} =$ _____
3. $A_3 = \frac{\sqrt{x+1}}{2x+2} =$ _____
4. $A_4 = \frac{2x\sqrt{x}}{x^4} =$ _____
5. $A_5 = \frac{3x(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)^2} =$ _____

Exercice 15. Factoriser dans une racine carrée

L'objectif de cet exercice est d'apprendre à factoriser dans une racine carrée et de simplifier. Par exemple $\sqrt{4x+12} = 2\sqrt{x+3}$, car :

$$\sqrt{4x+12} = \sqrt{4(x+3)} = \sqrt{4}\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+3}.$$

Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x est un nombre positif.

1. Simplifier : $A_1 = \sqrt{9x^2 + 18x + 36} =$ _____.
2. Simplifier : $A_2 = \sqrt{x^2 + 3x^4 - x^6} =$ _____.
3. Sous la racine, faire une factorisation forcée par x^4 puis simplifier :
 $A_3 = \sqrt{2x^4 - 3x^3 + x - 1} =$ _____.
4. Par une factorisation forcée, faire apparaître x^2 en facteur au dénominateur :
 $A_4 = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - x^2 - 1}} =$ _____



Attention!

Avez-vous bien pensé à remplir la liste des exercices à reprendre en classe ou dont vous voulez des doublons en page 1 ?

Egalités et résolutions d'équations

Objectif de cette partie

Trop souvent, les étudiants manipulent des fractions en “**passant de l’autre coté**” des expressions, sans savoir pourquoi ni comment cela marche. Pour certains, cela finit par **créer des erreurs atroces**, car on ne comprend pas ce qu’on fait. Dans les exercices de cette section, **il faut s’entraîner à justifier chaque ligne** par “je divise de part et d’autre par...”, ou encore “je soustrais de part et d’autre part ...” etc.

En maîtrisant à chaque instant ce que l’on fait, on ne peut plus se tromper.

Attention!

Ne surtout pas « passer de l'autre coté » des expressions. **Réfléchissez à l'opération effectuée** (addition? division?).

Exercice 16. Résolution d'équations

Exercice 16. Résolution d'équations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $2x + 3 = 7x - 2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $2x + 3 = 7x - 2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue t suivante :
- $$2t + 3 = \sqrt{3}t - \frac{1}{3}.$$
-

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue t suivante :

$$2t + 3 = \sqrt{3}t - \frac{1}{3}.$$

- [illegible]

[illegible]

Exercice 17. Résolution d'équations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue y suivante : $2y + 3(2 - y) = 7y - \frac{2}{3}(y - 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue y suivante : $2y + 3(2 - y) = 7y - \frac{2}{3}(y - 1)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante :

$$\sqrt{2}x + 1 - x = \frac{2}{5}x + 3.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ sur $] -\infty; -1[$ l'équation d'inconnue a suivante :

$$\frac{a+1}{a-1} = 12.$$

Exercice 18. Résolution mentale d'équations

Résoudre mentalement les équations/inéquations suivantes.

1. $x^2 = 3$, inconnue : $x \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{2Ru}{nT} = \frac{1}{A}$, inconnue : $u \in \mathbb{R}$.
3. $\frac{2Ru}{nT} = \frac{1}{A}$, inconnue : $T \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{2Ru}{nT} = \frac{1}{A}$, inconnue : $A \in \mathbb{R}$.
5. $-2x + 4 \leq 2$, inconnue : $x \in \mathbb{R}$.
6. $(u+1)^2 = 2$, inconnue : $u \in \mathbb{R}$.
7. $\sqrt{2}x + 1 = 1 - x$, inconnue : $x \in \mathbb{R}$.
8. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + 1$, inconnue : $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Manipulation d'égalité

Lors des cours que vous aurez l'an prochain, vos professeurs ne détailleront pas toujours toutes les étapes des calculs, il vous faudra être à l'aise sur certaines opérations pour suivre.
L'objectif de cet exercice est de vous entraîner aux situations que vous allez rencontrer au cours de l'année.

1. On suppose que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R'}{r+R'}$, que $\frac{V_2}{V_3} = \frac{R'}{r+R'}$, que $\frac{V_3}{V_4} = \frac{R'}{r+R'}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{R'}{r+R'}$.
On peut en déduire que $\frac{V_1}{V_n} = ?$

2. On sait que $r_1 = r_4 = R_0 + \Delta R$ et $r_2 = r_3 = R_0 - \Delta R$, et on sait aussi que

$$U_{AM} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E \quad \text{et} \quad U_{BM} = \frac{r_4}{r_3 + r_4} E.$$

Exprimer U_{AM} et U_{BM} en fonction de R_0 , ΔR et E . En déduire l'expression de $U_{BA} = U_{BM} - U_{AM}$.

3. On a :

$$U_2 = \frac{\frac{U_m}{R_4} + \frac{V_0}{R_3}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}}.$$

Exprimer U_m en fonction des autres variables, en simplifiant au maximum l'expression obtenue.

Exercice 20. Avec la calculatrice

Vous aurez besoin de savoir résoudre un système d'équations à l'aide de la calculatrice en sciences de l'ingénieur. Chaque calculatrice ayant son propre fonctionnement, vous devez chercher sur internet comment faire.

Résoudre à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{cases} 0 = \left(1 + \frac{15}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{56}{2,2}\right) \cdot \frac{100}{10000} \cdot E - V_0 \cdot \frac{15}{10} \\ 5 = \left(1 + \frac{15}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{56}{2,2}\right) \cdot \frac{100 \cdot (1 + 3,92 \cdot 10^{-3} \cdot 200 - 5,8 \cdot 10^{-7} \cdot 200^2)}{10000} \cdot E - V_0 \cdot \frac{15}{10} \end{cases}$$

Exercice 21. Systèmes d'équations

Vous devez savoir résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues par la **méthode de substitution**.

1. Résoudre $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 3y = 20 \end{cases}$ 2. Résoudre $\begin{cases} 10^{-5}x + 8 \cdot 10^{-9}y = 10^3 \\ 3 \cdot 10^2x + 9 \cdot 10^{-5}y = 101 \end{cases}$



$$4. \quad \frac{3}{5}(x+2) - 1 \geq 2x - \frac{1}{4}$$

$$5. \quad 1 - \sqrt{3}x + 2x < (x+1)(\sqrt{2}-1)$$

$$6. \quad 2\pi x - 12 > \frac{3x-1}{\pi-4}$$

Exercice 23. Tableaux de signe

La recherche du signe d'une expression est un savoir-faire fondamental en mathématiques, qui sera un pré-requis indispensable à de nombreux exercices.

Dans un premier temps, il est indispensable de savoir faire le tableau de signe d'expressions simples!

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes en fonction des valeurs de x dans $\mathbb{R}$.

$$1. \quad (x+1)(x+2)$$

2. $(2x + 3)(x + 4)$

3. $(2x + 3)(-2x + 4)$

4. $(-2x + 3)(1 - x)$

5. $(-2x + 3) + (1 - x)$

6. $(-2x + 3) - (1 - x)$

Exercice 25. Savoir passer des intervalles aux inéquations

En s'inspirant de l'exemple suivant, compléter :

$x \leq 4$ si et seulement si $x \in]-\infty; 4]$.

1. $x < 12$ _____
2. $x \geq 2$ _____
3. $0 \leq x \leq 5$ _____
4. $-2 \leq x < 2$ _____
5. $x \in]10; +\infty[$ _____
6. $x \in [0; 5[$ _____



Avez-vous bien pensé à remplir la liste des exercices à reprendre en classe ou dont vous voulez des doublons en page 1 ?

Exercice 26

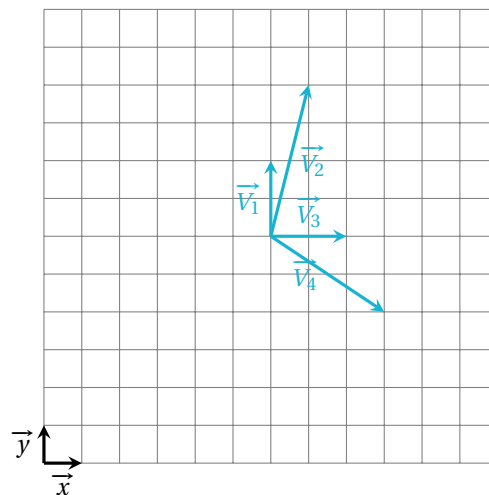
On donne 4 vecteurs sur le quadrillage ci-contre.

- Donner l'expression de chaque vecteur dans le plan en fonction des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

- Calculer $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 - \vec{V}_3$ et $\vec{V}_1 + 2\vec{V}_4$. On donnera la réponse en fonction des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

- Tracer $\vec{W}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_4$, $\vec{W}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ et $\vec{W}_3 = 3\vec{V}_3 - 2\vec{V}_4$.

- Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$ et $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_4$.



Exercice 27

- Déterminer l'équation de la droite passant par les points de coordonnées (1;2) et (4;8).

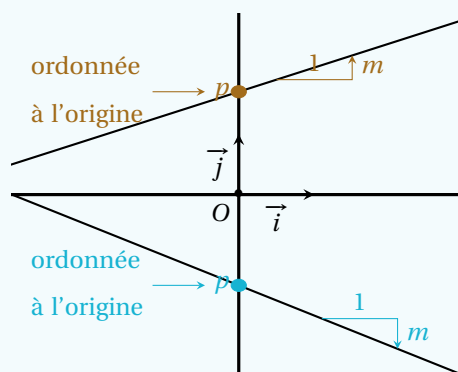
- Le point de coordonnées (3;5) appartient-il à cette droite?

Savoir tracer une droite

Vous devez savoir tracer une droite connaissant l'**ordonnée à l'origine** et le **coefficient directeur**.

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficient directeur}}}{m} x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ordonnée à l'origine}}}{p}$$

L'ordonnée à l'origine correspond à l'intersection de la droite avec l'**axe des abscisses**. Le coefficient directeur peut s'interpréter ainsi : à partir d'un point de la droite, on se **décalle de 1 à droite**, puis on **monte du coefficient directeur** (ou on descend s'il est négatif) et on **retombe sur la droite**.



Courbes de fonctions

Lien entre la tangente et la dérivée

Soit f une fonction définie sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

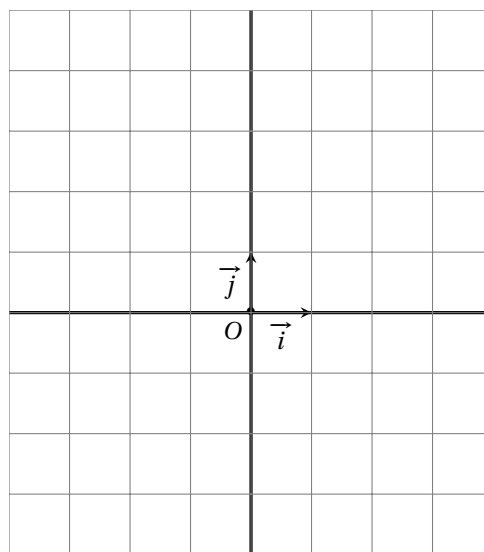
Il est essentiel de savoir que **le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point d'abscisse a est $f'(a)$** .

Cela permet entre autre de **tracer une courbe avec précision** et inversement de **lire approximativement la valeur d'une dérivée sur une courbe**.

Exercice 36. Tracer une courbe avec quelques dérivées

Sur la figure ci-contre, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

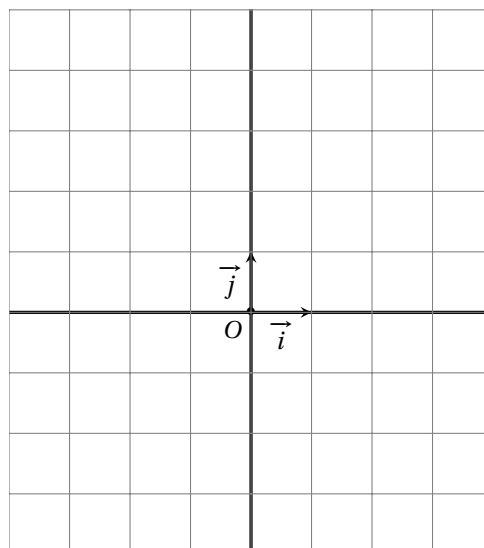
- $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1, 2)$ et $f'(1) = -1$.
- $\mathcal{C}$ passe par le point $B(-3, -2)$ et $f'(-3) = 3$.
- $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0$
- $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = \frac{1}{2}$



Exercice 37. Tracer une courbe avec quelques dérivées

Sur la figure ci-contre, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

- $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1, 2)$ et $f'(1) = -1$.
- $\mathcal{C}$ passe par le point $B(-3, -2)$ et $f'(-3) = 3$.
- $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0$
- $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = \frac{1}{2}$



Exercice 38. Tracer une courbe à partir d'un tableau de variations

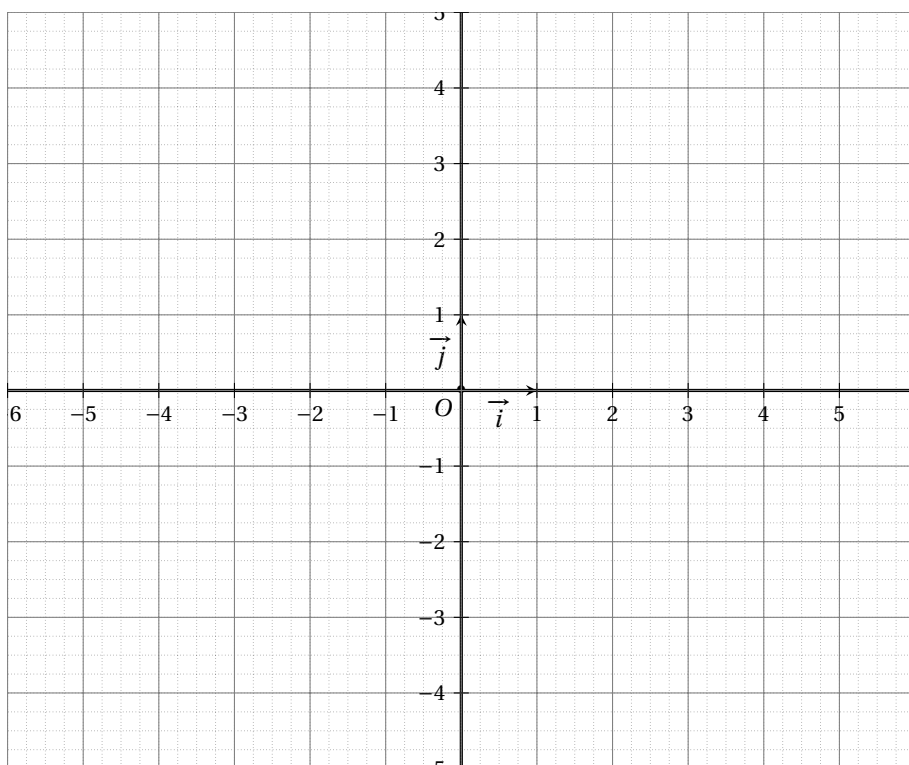
Tracer les courbes des fonctions dont on donne le tableau de variations. On fera apparaître systématiquement les tangentes aux points dont on connaît la dérivée sous la forme d'un petit bout de droite avec deux flèches :



Exercice 40. Courbes des fonctions de référence

Il est essentiel de connaître par cœur et **sans aucune hésitation** les courbes des fonctions de référence!

Dans le repère ci-contre, tracer l'allure des fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = 2x$, $k(x) = e^x$, $l(x) = e^{-x}$ et $m(x) = \ln(x)$.



Exercice 41. Savoir utiliser un tableur pour tracer une courbe

Soit la fonction $f(x) = 8x^2 + 12x + 1$.

1. Définir l'ordonnée du point d'abscisse 1. _____
2. Construire sur un tableur (comme Excel) un tableau permettant d'obtenir toutes les abscisses de 1 à 20 par pas de 1 et déterminer les ordonnées correspondantes. Tracer la courbe sur le tableur.

Les plus courageux pourront imprimer leur tableau et leur graphique, et les coller ci-contre.



Attention!

Avez-vous bien pensé à remplir la liste des exercices à reprendre en classe ou dont vous voulez des doublons en page 1?

Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 42. Simplifier une expression trigonométrique

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = \sin(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$ _____

2. $B = \sin(\pi + x) + \sin(x - \pi) - 2\sin(-x) =$ _____

3. $C = \cos(\pi + x) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(5\pi + x) =$ _____

4. $D = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(7\pi + x) =$ _____

5. $E = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$ _____

Exercice 43. Utiliser les valeurs usuelles des fonctions trigonométriques

Sans utiliser la calculatrice, calculer :

1. $\cos\left(\frac{26\pi}{6}\right) =$ _____

2. $\sin\left(\frac{26\pi}{6}\right) =$ _____

3. $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) =$ _____

4. $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) =$ _____

Exercice 44. Calculer le module et l'argument d'un nombre complexe

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = \sqrt{3} + i$ _____

2. $z_2 = 3 - 3i$ _____

3. $z_3 = 4i$ _____

4. $z_4 = 2$ _____

5. $z_5 = (\sqrt{3} + i)(-2 + 2i)$ _____

6. $z_6 = \frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$ _____

7. $z_7 = (-1 + \sqrt{3}i)^4$ _____

8. $z_2 = \frac{1}{1+i}$ _____

9. $z_3 = \frac{5e^{i\frac{\pi}{4}}}{3+3i}$ _____

Exercice 45. Simplifier une fraction de nombres complexes

1. On pose $Z_1 = \frac{1}{iC\omega}$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = R_1$, $Z' = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $T = \frac{Z'}{Z' + Z_3}$.

Exprimer T en fonction de C , ω , R_2 et R_1 , et écrire le résultat sous forme d'une seule fraction, simplifiée au maximum



Avez-vous bien pensé à remplir la liste des exercices à reprendre en classe ou dont vous voulez des doublons en page 1 ?

Exercice 46. Calculer une dérivée

1. $f(x) = \sqrt{3x+4}$

3. $f(x) = 5(-2x + 1)^6$ _____

5. $f(x) = (\cos(x))^3$ _____

6. $f(x) = \cos(2x + 3)$

7. $f(x) = (\cos(6x - 1))^6$ _____

8. $f(x) = (\sin(2x^2 + 3))^3$ _____

Déterminer une primitive pour chaque fonction suivante.

1. $f(x) = 4x + 1$ _____

2. $f(x) = -x^2 + 3x + 6$

Exercice 51. Dériver par rapport à plusieurs variables - plus difficile

Lorsqu'une expression dépend de plusieurs paramètres, vous serez amenés en physique à dériver par rapport à différentes variables. Par exemple, si

$$s = 3x(2y - 1) + z \cos(x),$$

lorsque l'on dérive par rapport à x , ce qu'on note $\frac{ds}{dx}$ au lieu de s' , on fait comme si y et z étaient des constantes, et on dérive, ce qui donne :

$$\frac{ds}{dx} = 3(2y - 1) - z \sin(x)$$

Lorsque l'on dérive par rapport à y , ce qu'on note $\frac{ds}{dy}$ on fait comme si x et z étaient des constantes :

$$\frac{ds}{dy} = 3x(2) + 0 = 6x.$$

On pose $s = A \cos(\omega t - kx\varphi)$. Dériver s par rapport à t , puis par rapport à x , puis par rapport à φ .

Exercice 52. Calculer une intégrale

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^1 \cos(5t) dt$. Pour cette question on pourra utiliser la formule suivante : une primitive de $u' \sin(u)$ est $-\cos(u)$, où u est une fonction.

2. $J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$. Pour cette question, il faut utiliser une formule de trigonométrie.

3. $K = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \theta) dt$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



Attention!

Avez-vous bien pensé à remplir la liste des exercices à reprendre en classe ou dont vous voulez des doublons en page 1 ?

